

# Torseurs associés à certaines relations algébriques entre polyzêtas aux racines de l'unité

Georges Racinet

version 3 — 5 mars 2001\*

**Résumé.** On décrit dans cette note une structure de torseur sur le schéma affine défini par une collection de relations  $\mathbb{Q}$ -algébriques entre les polyzêtas aux racines de l'unité, *i.e.* les valeurs prises sur un groupe fixé de racines complexes de l'unité par les fonctions hyperlogarithmiques à plusieurs variables. Dans le cas où la seule racine de l'unité est 1 (cas des *polyzêtas*), ces relations sont censées être les seules entre ces nombres et le torseur obtenu devrait être égal à celui des associateurs de Drinfel'd. Les formules utilisées sont en général celles de l'action de  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  sur la droite projective privée d'un nombre fini de points.

*Torsor structure associated to some algebraic relations between polyzetas at roots of unity*

**Abstract.** We describe in this note a torsor structure arising on the affine scheme defined by a system of  $\mathbb{Q}$ -algebraic relations between polyzetas at roots of unity, *i.e.* values of hyperlogarithmic functions on a fixed finite subgroup  $\Gamma$  of  $\mathbb{C}^*$ . For  $\Gamma = \{1\}$ , (polyzetas case), these relations are believed to span all the  $\mathbb{Q}$ -algebraic relations between those numbers and this torsor should be equal to Drinfel'd's, *i.e.* the Grothendieck-Teichmüller group acting on associators. The formulas for the general case are derived from the action of  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  on the projective line minus finitely many points.

## 1 Abridged English Version

In this note, we study some  $\mathbb{Q}$ -algebraic relations between some values of the following hyperlogarithmic functions

$$\text{Li}_{s_1, \dots, s_r}(z_1, \dots, z_r) = \sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_r > 0} \frac{z_1^{n_1} z_2^{n_2} \dots z_r^{n_r}}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \dots n_r^{s_r}}, \quad (1)$$

where  $s_1, \dots, s_r$  are positive integers. The radius of convergence of this power series is 1. It is convergent on the polycircle, except for  $(s_1, z_1) = (1, 1)$ . We shall consider the numbers  $\text{Li}_{s_1, \dots, s_r}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ , where  $\sigma_1, \dots, \sigma_r$  lie in some finite multiplicative subgroup  $\Gamma$  of  $\mathbb{C}^*$ . We call  $r$  the *length* of (1) and  $s_1 + \dots + s_r$  its *weight*. For  $\Gamma = \{1\}$ , these are the *polyzetas* numbers (also called MZVs, multizetas, ...) on which we focused in our thesis ([16]). All the statements present in this note are proved in full detail in [16] in this particular case, from which the general one is not very different.

---

\*Les versions 1 et 2 sont respectivement du 4 et 11 décembre 2000.

In sections 4 through 7, we recall some fundamental  $\mathbb{Q}$ -algebraic relations that those numbers do satisfy. For  $\Gamma = \{1\}$ , it is believed, after a lot of computer checking (*cf.* [11]), that these relations span *all* the  $\mathbb{Q}$ -algebraic relations between polyzetas. For the general case, the situation seems to be more complicated. We will denote by DMRD (Double “Mélange”<sup>1</sup>, Regularisation and Distribution) the relations given in sections 4–7.

As this work grew out of the striking connection between polyzetas and associators, let us recall some facts about these. Drinfel’d ([6]) introduced the concept of associator as a step towards the construction of quantized universal enveloping algebras. An associator with values in some  $\mathbb{Q}$ -ring  $\mathbb{k}$  is a Lie exponential in  $\mathbb{k}\langle\langle A, B \rangle\rangle$  satisfying some relations (inherited from McLane’s coherence constraints). Among them is the hexagonal equation, which depends on a parameter  $\lambda \in \mathbb{k}$ . Let  $\text{Ass}(\mathbb{k})$  be the set of all associators and  $\text{Ass}_\lambda(\mathbb{k})$  the set of associators with parameter  $\lambda$ . Drinfel’d proved the existence of a pro-unipotent group scheme  $\text{GRT}_1(\mathbb{k})$  acting freely and transitively on each  $\text{Ass}_\lambda(\mathbb{k})$ . This is his “graded” pronipotent version of the Grothendieck-Teichmüller group, an interesting object of study in itself, because of its relations with the absolute Galois group (*cf.* [6, 13]).

The only explicitly defined example of an associator, denoted  $\Phi_{\text{KZ}}$ , is obtained in terms of solutions of the Knizhnik-Zamolodchikov differential system  $KZ_3$  which is also closely related with the iterated integrals that give rise to the first shuffle relations. It is an element of  $\text{Ass}_{i\pi}(\mathbb{C})$ . In 1993 Le and Murakami gave an expression of  $\Phi_{\text{KZ}}$  involving all the polyzetas. Actually,  $\Phi_{\text{KZ}}$  is almost equal to the non-commutative generating series we shall denote  $\mathcal{L}_{\text{LJ}}(\mathbf{1})$  in section 4. As the relations DMRD should span all the  $\mathbb{Q}$ -algebraic relations between polyzetas, by replacing in  $\Phi_{\text{KZ}}$  the polyzetas by formal symbols satisfying these relations, we should get a “universal” associator over  $\mathbb{Q}$ , but we are not able to prove that.

As those relations are at their simplest on the generating series, we will consider all the series, with coefficients in an arbitrary  $\mathbb{Q}$ -ring  $\mathbb{k}$  satisfying them. For arbitrary  $\Gamma$ , this gives a functor  $\mathbb{k} \mapsto \text{DMRD}(\Gamma)(\mathbb{k})$ . We consider it as a concrete realisation of the affine scheme associated with the relations DMRD. The main result, given in section 10, is that this object is fibered over the affine line  $\mathbb{A}^1$  and is a trivial torsor (as an affine  $\mathbb{A}^1$ -scheme). It is indeed very close to Drinfel’d’s : for  $\Gamma = \{1\}$ , the torsors  $\text{DMRD}(\Gamma)$  and  $\text{Ass}$  work with the same formula. The law  $\otimes$  we use for the action in the general case is not original either : as for  $\Gamma = \{1\}$ , it comes from the theory of Galois representation into pro-algebraic fundamental groups and from monodromy torsors (*cf.* [10, 18]). The law  $\otimes$  defines a pro-unipotent group scheme on its maximal domain of definition. It is denoted  $\text{MT}(\Gamma)$  and described in section 9. Its infinitesimal structure is described by two kinds of operators : the special derivations, which are relevant for its Lie algebra  $\mathfrak{mt}(\Gamma)$ , and the tangential action operators (denoted  $s_\psi$ ), which are relevant for the exponential map  $\mathfrak{mt}(\Gamma) \rightarrow \text{MT}(\Gamma)$ .

The most difficult part of this work is to show the stability of the second shuffle relation (section 5) under this action, because we’re not able to explain it easily in terms of Galois actions or monodromy actions. The end of this note is devoted to a sketch of proof for the main result.

In section 11, we study the tangent space  $\mathfrak{dmrd}(\Gamma)$  near 1 of DMRD and define a linear form  $\mathbb{k}\langle\langle X_\Gamma \rangle\rangle(\mathbb{k}) \rightarrow \mathbb{k}$  who will eventually become the map of the theorem. We denote by  $\mathfrak{dmrd}_0(\Gamma)(\mathbb{k})$  its kernel in  $\mathfrak{dmrd}(\Gamma)(\mathbb{k})$ . Next, in section 12, we sketch the proof of the hardest part of the theorem :  $\text{DMRD}_\lambda(\Gamma)(\mathbb{k})$  is stable under the exponential of the tangential action of  $\mathfrak{dmrd}_0(\Gamma)(\mathbb{k})$  on  $\mathbb{k}\langle\langle X_\Gamma \rangle\rangle$  with respect to the law  $\otimes$ . The arguments used there prove also that  $\mathfrak{dmrd}_0(\Gamma)(\mathbb{k})$  is a Lie subalgebra of  $\mathfrak{mt}(\Gamma)$ , and therefore its exponential is a sub-group scheme of  $\text{MT}(\Gamma)$ . The section 13 is devoted to the transitivity of this action, thus concluding the proof of theorem. The method we use there is valid in a much more general framework.

In the last section, we explain some consequences of the torsor structure. First, the formal

---

<sup>1</sup>This is the french word for “shuffle”.

algebra  $\mathcal{DMRD}(\Gamma)$  is a polynomial algebra and every basis of the finite part of  $\mathfrak{dmrd}_0(\Gamma)$  gives rise to a set of free generators. For  $\Gamma = \{1\}$ , this is Écalle's theorem ([8]). Next we show that Drinfeld's irreducible elements, which conjecturally span freely the Lie algebra of  $\mathbf{GRT}_1$ , are in  $\mathfrak{dmrd}_0(\{1\})$ , thus enforcing the conjecture that the relations DMRD are actually equivalent to the equations defining associators.

### 1.1 Differences between versions 2 and 3

- Bad coefficients in projections used for the formulation of the distribution relations (section 7). Consequently, all distribution-like formulas have been corrected. This doesn't change anything on the result.
- The short exact sequence used in definition 8.1 was irrelevant. Also, the coefficients appearing in weight 1 relations change with the imbedding of  $\Gamma$  into  $\mathbb{C}^*$ . So  $\mathcal{DMRD}(\Gamma)$  doesn't make sense for "abstract"  $\Gamma$ .
- Some tables of dimensions have been included for the tangent spaces  $\mathfrak{dmrd}(\Gamma)$  and  $\mathfrak{dmr}(\Gamma)$  in which the relevant Lie algebras are of codimension 1.

## 2 Remerciement

Je suis très reconnaissant envers Pierre Cartier de m'avoir donné ce sujet de thèse. Son aide m'a été précieuse tant par l'orientation générale que par l'œuvre de simplification et reformulation qu'il a accomplie, sans laquelle ce travail n'aurait pu être fait. Merci également à Michel Petitot pour ses tables de relations et à Benjamin Enriquez et Pierre Deligne pour leurs remarques.

## 3 Conventions, notations

Un  $\mathbb{Q}$ -anneau est un anneau commutatif qui contient  $\mathbb{Q}$ . Toutes les algèbres sont associatives et unifères. Pour tout  $\mathbb{Q}$ -anneau  $\mathbb{k}$  et tout alphabet  $Z$ , on note respectivement  $Z^*$ ,  $\mathbb{k}\langle Z \rangle$  et  $\mathbb{k}\langle\langle Z \rangle\rangle$  le monoïde libre et les  $\mathbb{k}$ -algèbres de polynômes et de séries non-commutatives formées sur  $Z$ . Dans les situations considérées on aura sur  $\mathbb{k}\langle Z \rangle$  une graduation (le poids) permettant les considérations topologiques usuelles. On note alors  $(\cdot|\cdot)$  le produit scalaire de  $\mathbb{k}\langle Z \rangle$  pour lequel  $Z^*$  est orthonormale. Cela permettra toujours d'identifier  $\mathbb{k}\langle Z \rangle$  à son dual gradué. Le symbole  $\widehat{\otimes}$  désigne un produit tensoriel complété. On note  $1$  le mot vide et  $\mathbf{1}$  le groupe à un élément. On considère les schémas sur  $\mathrm{Spec}(\mathbb{Q})$  comme des foncteurs de la catégorie des  $\mathbb{Q}$ -anneaux dans celle des ensembles (cf. [5]).

## 4 Premières relations de mélange

Le contenu de cette partie est très bien connu. La lettre  $\Gamma$  désigne un sous-groupe multiplicatif fini de  $\mathbb{C}^*$ . Soit  $X_\Gamma = \{x_0\} \cup \{(x_\sigma)_{\sigma \in \Gamma}\}$  un alphabet. On munit  $\mathbb{Q}\langle X_\Gamma \rangle$  du coproduit  $\Delta$  qui en fait la bigèbre enveloppante de l'algèbre de Lie libre formée sur  $X_\Gamma$ . On la munit de la graduation pour laquelle les éléments de  $X_\Gamma$  sont de degré 1. Dans la suite, cette graduation sera appelée le *poids*. Le produit scalaire  $(\cdot|\cdot)$  permet alors de considérer l'algèbre  $(\mathbb{Q}\langle X_\Gamma \rangle, \sqcup)$  duale de la cogèbre

$(\mathbb{Q}\langle X_\Gamma \rangle, \Delta)$  (voir [17]). À tout mot  $w = x_{\varepsilon_1} x_{\varepsilon_2} \cdots x_{\varepsilon_r}$  en  $X_\Gamma$ , on associe l'intégrale itérée

$$I(w) = \int_{0 \leq t_r \leq \cdots \leq t_1 \leq 1} \bigwedge_{i=1}^r \omega_{\varepsilon_i}(t_i), \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{dt}{t} \quad \text{et} \quad \omega_\sigma = \frac{\sigma dt}{1 - \sigma t}, \quad \text{pour tout } \sigma \in \Gamma \quad (2)$$

On pose par convention  $I(1) = 1$ . L'intégrale  $I(w)$  est convergente si et seulement si le mot  $w$  ne commence pas par  $x_1$  et ne se finit pas par  $x_0$ . On note  $X_{\Gamma, \text{cv}}^*$  l'ensemble de ces mots et  $\mathbb{Q}(X_{\Gamma, \text{cv}}^*)$  le sous- $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel de  $\mathbb{Q}\langle X_\Gamma \rangle$  qu'il engendre. On étend l'application  $I$  par linéarité à  $\mathbb{Q}(X_{\Gamma, \text{cv}}^*)$ .

**Proposition 4.1.** *L'ensemble  $\mathbb{Q}(X_{\Gamma, \text{cv}}^*)$  est une sous-algèbre de  $(\mathbb{Q}\langle X_\Gamma \rangle, \sqcup)$ . L'application  $I$  est un morphisme d'algèbres de  $(\mathbb{Q}(X_{\Gamma, \text{cv}}^*), \sqcup)$  dans  $\mathbb{C}$ .*

Ceci constitue un premier système de relations entre polyzêtas aux racines de l'unité, grâce à la proposition ci-dessous

**Proposition 4.2.** *Pour tous entiers strictement positifs  $s_1, \dots, s_r$  et tous éléments  $\sigma_1, \dots, \sigma_r$  de  $\Gamma$  tels que  $(s_1, \sigma_1)$  soit différent de  $(1, 1)$ , on a :*

$$\text{Li}_{s_1, \dots, s_r}(\sigma_1, \dots, \sigma_r) = I(x_0^{s_1-1} x_{\sigma_1} x_0^{s_2-1} x_{\sigma_1 \sigma_2} \cdots x_0^{s_r-1} x_{\sigma_1 \cdots \sigma_r}) \quad (3)$$

Il est plus satisfaisant d'étendre la définition de  $I$  à  $\mathbb{Q}\langle X_\Gamma \rangle$  tout entier. Cette *régularisation* est rendue possible grâce aux propriétés du produit  $\sqcup$  :

**Proposition 4.3.** *Il existe un unique morphisme d'algèbres  $\bar{I}$  de  $(\mathbb{Q}\langle X_\Gamma \rangle, \sqcup)$  dans  $\mathbb{C}$  coïncidant avec  $I$  sur  $\mathbb{Q}(X_{\Gamma, \text{cv}}^*)$  et vérifiant  $\bar{I}(x_0) = \bar{I}(x_1) = 0$ .*

De façon duale, considérons la série génératrice non-commutative  $\mathcal{L}_\sqcup(\Gamma) := \sum_{w \in X_\Gamma^*} \bar{I}(w)w$  qui appartient à  $\mathbb{C}\langle\langle X_\Gamma \rangle\rangle$ . Par dualité entre le produit  $\sqcup$  et le coproduit  $\Delta$ , la première relation de mélange est équivalente à  $\Delta \mathcal{L}_\sqcup(\Gamma) = \mathcal{L}_\sqcup(\Gamma) \hat{\otimes} \mathcal{L}_\sqcup(\Gamma)$ . Si l'on identifie  $A$  avec  $x_0$  et  $B$  avec  $-x_1$ , l'associateur  $\Phi_{\text{KZ}}$  est égal à  $\mathcal{L}_\sqcup(\mathbf{1})$ .

## 5 Secondes relations de mélange

Il s'agit ici de décrire la combinatoire des relations que l'on obtient par produit de séries et décomposition du domaine de sommation, comme par exemple :

$$\begin{aligned} \text{Li}_{s_1}(\sigma_1) \text{Li}_{s_2}(\sigma_2) &= \sum_{n_1, n_2 > 0} \frac{\sigma_1^{n_1} \sigma_2^{n_2}}{n_1^{s_1} n_2^{s_2}} = \sum_{n_1 > n_2 > 0} \frac{\sigma_1^{n_1} \sigma_2^{n_2}}{n_1^{s_1} n_2^{s_2}} + \sum_{n_2 > n_1 > 0} \frac{\sigma_1^{n_1} \sigma_2^{n_2}}{n_1^{s_1} n_2^{s_2}} + \sum_{n > 0} \frac{(\sigma_1 \sigma_2)^n}{n^{s_1 + s_2}} \\ &= \text{Li}_{s_1, s_2}(\sigma_1, \sigma_2) + \text{Li}_{s_2, s_1}(\sigma_2, \sigma_1) + \text{Li}_{s_1 + s_2}(\sigma_1 \sigma_2) \end{aligned} \quad (4)$$

Dans le cas  $\Gamma = \mathbf{1}$ , on sait que l'on peut décrire ces relations en interprétant  $\text{Li}$  comme un opérateur de spécialisation sur l'algèbre des fonctions quasi-symétriques. Dans [16], on se ramène à la cogèbre duale. Dans [2], il est proposé une généralisation : les « fonctions quasi-symétriques colorées ». On peut également la décrire en termes de cogèbre :

Soit  $Y_\Gamma = \{y_{n, \nu}\}_{n \in \mathbb{N}^*, \nu \in \Gamma}$  un alphabet. On munit  $\mathbb{Q}\langle Y_\Gamma \rangle$  de la graduation telle que  $y_{n, \nu}$  soit de degré  $n$  pour tous  $n$  et  $\nu$ . On l'appelle encore le poids. L'unique morphisme d'algèbres de  $\mathbb{Q}\langle Y_\Gamma \rangle$  dans son carré tensoriel vérifiant :

$$\Delta_* y_{n, \nu} = \sum_{\substack{k+l=n, \kappa \lambda = \nu \\ k, l \in \mathbb{N}, \kappa, \lambda \in \Gamma}} y_{k, \kappa} \otimes y_{l, \lambda} \quad \text{avec la convention} \quad y_{0, \sigma} = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma = 1 \\ 0 & \text{si } \sigma \neq 1 \end{cases} \quad (5)$$

fait de  $(\mathbb{Q}\langle Y_\Gamma \rangle, \cdot, \Delta_\star)$  une bigèbre graduée. On note  $\star$  le produit dual du coproduit  $\Delta_\star$ . Soit  $Y_{\Gamma, \text{cv}}^*$  l'ensemble des mots de  $Y_\Gamma^*$  ne commençant pas par  $y_{1,1}$  et  $\mathbb{Q}(Y_{\Gamma, \text{cv}}^*)$  le sous- $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel qu'il engendre. On note, par abus, encore  $\text{Li}$  l'application  $\mathbb{Q}$ -linéaire de  $\mathbb{Q}(Y_{\Gamma, \text{cv}}^*)$  dans  $\mathbb{C}$  qui vérifie :

$$L(y_{s_1, \sigma_1} y_{s_2, \sigma_2} \cdots y_{s_r, \sigma_r}) = \text{Li}_{s_1, s_2, \dots, s_r}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r) \quad \text{et} \quad L(1) = 1$$

**Proposition 5.1 (Seconde relation de mélange).** *L'ensemble  $\mathbb{Q}(Y_{\Gamma, \text{cv}}^*)$  est une sous-algèbre de  $(\mathbb{Q}\langle Y_\Gamma \rangle, \star)$  et l'application linéaire  $\text{Li}$  est un morphisme d'algèbres de  $(\mathbb{Q}(Y_{\Gamma, \text{cv}}^*), \star)$  dans  $\mathbb{C}$ .*

Ceci exprime les relations du type (4). Dans le cas  $\Gamma = \mathbf{1}$ , il est classique que la bigèbre  $(\mathbb{Q}\langle Y_\Gamma \rangle, \cdot, \Delta_\star)$  se ramène à une bigèbre enveloppante d'algèbre de Lie libre (cf. [15]). La généralisation au cas  $\Gamma$  quelconque est facile et permet d'étendre  $\text{Li}$  à  $\mathbb{Q}\langle Y_\Gamma \rangle$ , comme à la section précédente :

**Proposition 5.2.** *Il existe une unique série  $\mathcal{L}_\star(\Gamma) \in \mathbb{C}\langle Y_\Gamma \rangle$  telle que*

$$(\mathcal{L}_\star(\Gamma)|_{y_{1,1}}) = 0, \quad (\mathcal{L}_\star(\Gamma)|_w) = L(w) \quad \forall w \in Y_{\Gamma, \text{cv}}^* \quad \text{et} \quad \Delta_\star(\mathcal{L}_\star(\Gamma)) = \mathcal{L}_\star(\Gamma) \hat{\otimes} \mathcal{L}_\star(\Gamma)$$

## 6 Relations de régularisation

Le codage dans l'alphabet  $Y$  que l'on vient d'utiliser est quasiment tautologique. Pour tenir compte de (3) il est commode d'identifier, pour tout  $(n, \nu)$  appartenant à  $\mathbb{N}^* \times \Gamma$ , la lettre  $y_{n, \nu}$  au mot  $x_0^{n-1} x_\nu$ . Cela permet de plonger par morphisme pour le produit de concaténation  $\mathbb{Q}\langle Y_\Gamma \rangle$  dans  $\mathbb{Q}\langle X_\Gamma \rangle$ . On notera  $\pi_Y : \mathbb{Q}\langle X_\Gamma \rangle \rightarrow \mathbb{Q}\langle Y_\Gamma \rangle$  la projection duale de ce plongement. On constate que  $\mathbb{Q}(Y_{\Gamma, \text{cv}}^*)$  est égal à  $\mathbb{Q}(X_{\Gamma, \text{cv}}^*)$ . Si l'on note  $\mathbf{ps}$  (produits successifs) l'endomorphisme linéaire de  $\mathbb{Q}\langle Y_\Gamma \rangle$  donné par

$$\forall s_1, \dots, s_r \in \mathbb{N}^*, \sigma_1, \dots, \sigma_r \in \Gamma, \quad \mathbf{ps}(y_{s_1, \sigma_1} y_{s_2, \sigma_2} \cdots y_{s_r, \sigma_r}) = y_{s_1, \sigma_1} y_{s_2, \sigma_1 \sigma_2} \cdots y_{s_r, \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_r} \quad (6)$$

la formule (3) devient alors :  $\forall v \in \mathbb{Q}(Y_{\Gamma, \text{cv}}^*), L(w) = I(\mathbf{ps}(w))$ . La question se pose de savoir si cette formule reste vraie pour  $\text{Li}_\star$  et  $I_{\sqcup}$ . Ce serait équivalent, en notant  $\mathbf{qs}$  (quotients successifs) l'inverse de  $\mathbf{ps}$ , à  $\mathbf{qs}\pi_Y(\mathcal{L}_{\sqcup}(\Gamma)) = \mathcal{L}_\star(\Gamma)$ . Ceci est malheureusement faux, mais Écalte ([7]) a donné l'expression générale de la correction à apporter :

**Proposition 6.1 (Relation de régularisation).** *On a*

$$\mathcal{L}_\star = \exp \left( \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \zeta(n) y_1^n \right) \mathbf{qs}\pi_Y(\mathcal{L}_{\sqcup})$$

Cette formule implique la relation d'Hoffman utilisée en [11] et généralisée à  $\Gamma$  quelconque en [2] : celle-ci se réduit à l'absence de terme  $n = 1$  dans la somme ci-dessus. Faute de disposer de la démonstration d'Écalte, on en a donné une autre dans [16] pour le cas  $\Gamma = \mathbf{1}$ , basée sur les remarques de Boutet de Monvel ([3]). La généralisation à  $\Gamma$  quelconque en est immédiate.

## 7 Relations de distribution

On utilise une description proche d'une de celles de Goncharov (cf. [10]). Pour tout sous-groupe  $\Gamma'$  de  $\Gamma$ , soit  $\text{proj}_{\Gamma \rightarrow \Gamma'}^1$  la projection de  $\mathbb{C}\langle X_\Gamma \rangle$  sur  $\mathbb{C}\langle X_{\Gamma'} \rangle$  duale de l'inclusion de  $\mathbb{C}\langle X_{\Gamma'} \rangle$  dans  $\mathbb{C}\langle X_\Gamma \rangle$  et  $\text{proj}_{\Gamma \rightarrow \Gamma'}^2$  le morphisme d'algèbres topologiques de  $\mathbb{C}\langle X_\Gamma \rangle$  dans  $\mathbb{C}\langle X_{\Gamma'} \rangle$  caractérisé par

$$\begin{aligned} \forall \sigma \in \Gamma, \quad \text{proj}_{\Gamma \rightarrow \Gamma'}^2(x_\sigma) &= x_{\sigma[\Gamma : \Gamma']} \\ \text{et} \quad \text{proj}_{\Gamma \rightarrow \Gamma'}^2(x_0) &= [\Gamma : \Gamma'] x_0 \end{aligned}$$

Avec ces notations, on a :

$$\text{proj}_{\Gamma \rightarrow \Gamma'}^2(\mathcal{L}_{\sqcup}(\Gamma)) = \exp \left( \sum_{\sigma[\Gamma:\Gamma']=1, \sigma \neq 1} \text{Li}_1(\sigma)x_1 \right) \text{proj}_{\Gamma \rightarrow \Gamma'}^1(\mathcal{L}_{\sqcup}(\Gamma)), \quad (7)$$

Pour être plus précis, les relations de distribution expriment l'égalité des coefficients des mots convergents dans  $\text{proj}_{\Gamma \rightarrow \Gamma'}^1(\mathcal{L}_{\sqcup}(\Gamma))$  et  $\text{proj}_{\Gamma \rightarrow \Gamma'}^2(\mathcal{L}_{\sqcup}(\Gamma))$ . Ces deux séries sont « group-like » dans  $(\mathbb{C}\langle X_{\Gamma'} \rangle, \Delta)$ , car les deux projections sont des morphismes de cogèbres. D'après une variante plus générale de la proposition 4.3, il suffit donc pour comparer ces séries d'étudier leurs termes en  $x_1$ , ce qui donne la formule ci-dessus.

Enfin, il faut ajouter à toutes ces relations celles que l'on obtient en exprimant que, pour tout  $\sigma \in \Gamma$ , les  $\log(1 - \sigma) - \log(1 - \sigma^{-1})$  sont des multiples rationnels de  $i\pi$  et donc proportionnels sur  $\mathbb{Q}$ . On les appellera *relations de poids 1* et on les inclura dans le système DMRD.

## 8 Objets formels

Pour étudier la structure algébrique sous-jacente aux relations DMRD, on pourrait considérer la  $\mathbb{Q}$ -algèbre  $\mathcal{DMRD}(\Gamma)$  engendrée par des symboles formels indexés comme les valeurs des hyperlogarithmes aux racines de l'unité, modulo les relations DMRD. Il est équivalent, et plus simple, de travailler sur l'objet dual, *i.e.* l'ensemble des séries satisfaisant aux mêmes relations que  $\mathcal{L}_{\sqcup}(\Gamma)$ , mais à coefficients dans des  $\mathbb{Q}$ -anneaux quelconques.

**Définition 8.1.** *Pour tout  $\mathbb{Q}$ -anneau  $\mathbb{k}$  et tout groupe commutatif fini  $\Gamma$ , on note  $\text{DMR}(\Gamma)(\mathbb{k})$  l'ensemble des éléments  $\Phi$  de  $\mathbb{k}\langle X_{\Gamma} \rangle$  tels que :*

$$(\Phi|1) = 1 \quad \text{et} \quad (\Phi|x_0) = (\Phi|x_1) = 0 \quad (8)$$

$$\Delta\Phi = \Phi \hat{\otimes}_{\mathbb{k}} \Phi \quad \text{et} \quad \Delta_{\star}\Phi_{\star} = \Phi_{\star} \hat{\otimes}_{\mathbb{k}} \Phi_{\star}, \quad (9)$$

$$\text{où l'on pose} \quad \Phi_{\star} := \Phi_{\text{corr}} \cdot \text{qs}\pi_Y(\Phi) \quad \text{et} \quad \Phi_{\text{corr}} := \exp \left( \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (\pi_Y(\Phi)|y_n)y_1^n \right) \quad (10)$$

Si, de plus,  $\Gamma$  est un sous-groupe multiplicatif de  $\mathbb{C}^*$ , on note  $\text{DMRD}(\Gamma)(\mathbb{k})$  l'ensemble des éléments  $\Phi$  de  $\text{DMR}(\Gamma)(\mathbb{k})$  vérifiant la relation de distribution

$$\text{proj}_{\Gamma \rightarrow \Gamma'}^2(\Phi) = \exp \left( \sum_{\sigma[\Gamma:\Gamma']=1} (\Phi|x_{\sigma})x_1 \right) \text{proj}_{\Gamma \rightarrow \Gamma'}^1(\Phi),$$

pour tout sous-groupe  $\Gamma'$  de  $\Gamma$  et les relations de poids 1.

Le symbole  $\text{DMRD}(\Gamma)$  est un foncteur de la catégorie des  $\mathbb{Q}$ -anneaux dans celle des ensembles. Il est naturellement isomorphe à  $\text{Spec}(\mathcal{DMRD}(\Gamma))$ . La série  $\mathcal{L}_{\sqcup}(\Gamma)$  appartient à  $\text{DMRD}(\Gamma)(\mathbb{C})$  et on a  $\mathcal{L}_{\sqcup}(\mathbf{1}) = \Phi_{\text{KZ}}$ . Le théorème d'Écalé ([7]), énoncé fin 1999, dit que  $\mathcal{DMRD}(\mathbf{1})$  est une algèbre de polynômes et en décrit les générateurs libres.

## 9 Le groupe $\text{MT}(\Gamma)$ et sa structure infinitésimale

Dans ce qui suit, pour tout élément  $\gamma$  de  $\Gamma$ , on note  $t_{\gamma}$  l'action naturelle de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{k}\langle X_{\Gamma} \rangle$ , *i.e.* l'automorphisme de  $\mathbb{k}$ -algèbres topologiques de  $\mathbb{k}\langle X_{\Gamma} \rangle$  fixant  $x_0$  et envoyant  $x_{\sigma}$  sur  $x_{\gamma\sigma}$ , pour tout  $\sigma \in \Gamma$ .

Pour tout  $\mathbb{Q}$ -anneau  $\mathbb{k}$ , soit  $\text{MT}(X_\Gamma)(\mathbb{k})$  l'ensemble des séries de  $\mathbb{k}\langle\langle X_\Gamma \rangle\rangle$  dont le terme constant vaut 1 et muni du produit  $\otimes$  donné par  $G \otimes H = G \cdot \kappa_G(H)$ , où  $\kappa_G$  est le morphisme de  $\mathbb{k}$ -algèbres topologiques caractérisé par

$$\kappa_G(x_0) = x_0 \quad \text{et} \quad \kappa_G(x_\sigma) = t_\sigma(G)^{-1} x_\sigma t_\sigma(G) (\forall \sigma \in \Gamma) \quad (11)$$

Vu comme foncteur en  $\mathbb{k}$ , c'est un schéma en groupes pro-unipotent sur  $\mathbb{Q}$ , car  $\kappa$  en est une représentation linéaire fidèle dans  $\mathbb{k}\langle\langle X_\Gamma \rangle\rangle$  et  $\kappa_G(w) = w$  modulo des termes de plus haut poids que  $w$ , pour tout mot  $w$  de  $X_\Gamma^*$ . Ce groupe n'est autre que celui des automorphismes de  $\mathbb{k}\langle\langle X_\Gamma \rangle\rangle$ , équivariants pour l'action naturelle de  $\Gamma$ , qui laissent stables à conjugaison près les  $(x_\sigma)_{\sigma \in \Gamma}$  et laissent  $x_0$  invariant. Son algèbre de Lie  $\mathbb{k} \mapsto \mathfrak{mt}(\Gamma)(\mathbb{k})$  est formée des séries sans terme constant de  $\mathbb{k}\langle\langle X_\Gamma \rangle\rangle$ . On note  $\psi_1, \psi_2 \mapsto \langle \psi_1, \psi_2 \rangle$  son crochet. En linéarisant le produit  $\otimes$  au voisinage de 1, on obtient les résultats suivants :

Pour toute série  $\psi \in \mathfrak{mt}(\Gamma)(\mathbb{k})$ , soit  $d_\psi$  la dérivation continue de  $\mathbb{k}\langle\langle X_\Gamma \rangle\rangle$  caractérisée par

$$d_\psi(x_0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall \sigma \in \Gamma, \quad d_\psi(x_\sigma) = [x_\sigma, t_\sigma(\psi)] \quad (12)$$

C'est ce que Goncharov, suivant Ihara, appelle une dérivation spéciale équivariante (pour l'action de  $\Gamma$ ). Si l'on note  $s_\psi(\varphi) = \psi\varphi + d_\psi(\varphi)$ , pour tout  $\varphi$  de  $\mathbb{k}\langle\langle X_\Gamma \rangle\rangle$ , et  $\exp^\otimes$  l'application exponentielle de  $\mathfrak{mt}(\Gamma)(\mathbb{k})$  dans  $\text{MT}(\Gamma)(\mathbb{k})$ , on a :

$$\forall \psi \in \mathfrak{mt}(\Gamma)(\mathbb{k}), \quad H \in \mathbb{k}\langle\langle X_\Gamma \rangle\rangle \quad \exp^\otimes(\psi) \otimes H = \exp(s_\psi)(H) \quad (13)$$

$$\forall \psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{mt}(\Gamma)(\mathbb{k}), \quad s_{\langle \psi_1, \psi_2 \rangle} = [s_{\psi_1}, s_{\psi_2}] \quad (14)$$

De plus, pour tout  $\psi$  de  $\mathbb{k}\langle\langle X_\Gamma \rangle\rangle$ , on a  $s_\psi(1) = \psi$ .

## 10 Énoncé du résultat principal

**Théorème I.** *Si  $\Gamma$  est un sous-groupe fini de  $\mathbb{C}$ , il existe un morphisme de schémas  $\text{DMRD}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{A}^1$  ayant les propriétés suivantes :*

- pour tout  $\mathbb{Q}$ -anneau  $\mathbb{k}$ , l'application  $\text{DMRD}(\Gamma)(\mathbb{k}) \rightarrow \mathbb{k}$  est surjective
- la fibre spéciale  $\text{DMRD}_0(\Gamma)$  au-dessus de 0 est un sous-schéma en groupes de  $\text{MT}(\Gamma)$
- pour tout  $\mathbb{Q}$ -anneau  $\mathbb{k}$  et tout  $\lambda \in \mathbb{k}$ , le groupe  $\text{DMRD}_0(\Gamma)(\mathbb{k})$  agit librement et transitivement sur  $\text{DMRD}_\lambda(\mathbb{k})$  par translation à gauche (au sens de  $\otimes$ )

Pour  $\Gamma = \mathbf{1}$  et  $\Gamma = \{-1, 1\}$  la flèche du théorème donne la valeur  $\lambda$  de  $\mathbb{k}$  par laquelle on a remplacé  $\zeta(2)$ . Dans le cas où le cardinal de  $\Gamma$  vaut au moins 3, elle donne la valeur par laquelle on a remplacé  $\log(1 - e^{2i\pi/N}) - \log(1 - e^{-2i\pi/N})$ , lui-même multiple rationnel de  $i\pi$ .

À titre de comparaison, on peut résumer ainsi les propositions 5.5 et 5.9 de [6] dont le théorème I est inspiré :

**Théorème II (Drinfel'd).** *Le schéma  $\text{Ass}_0$  est un sous-schéma en groupes de  $\text{MT}(\mathbf{1})$  et  $\text{Ass}_0(\mathbb{k})$ , égal à  $\text{GRT}_1(\mathbb{k})$ , agit librement et transitivement par translation à gauche au sein de  $\text{MT}(\mathbf{1})(\mathbb{k})$  sur chaque  $\text{Ass}_\lambda(\mathbb{k})$ , pour tout  $\mathbb{Q}$ -anneau  $\mathbb{k}$  et tout  $\lambda \in \mathbb{k}$ .*

La flèche  $\text{Ass} \rightarrow \mathbb{A}^1$  indique quel est l'élément  $\lambda$  de  $\mathbb{k}$  qui intervient dans l'équation hexagonale. Dans le cas de  $\Phi_{KZ}$ , on a  $\lambda = i\pi$ .

**Conjecture I.** *Pour tout  $\mathbb{Q}$ -anneau  $\mathbb{k}$  et tout  $\lambda \in \mathbb{k}$ , on a  $\text{Ass}_\lambda(\mathbb{k}) = \text{DMRD}_{-\lambda^2/6}(\mathbf{1})(\mathbb{k})$ .*

Cette conjecture est étayée par la compatibilité entre les conjectures de dimension de Zagier (cf. [19]) et la variante de Drinfel'd de la conjecture de Deligne (cf. [6], p. 860). On donnera quelques informations supplémentaires à ce propos à la fin de la section 14.

## 11 Les espaces tangents $\mathfrak{d}\mathfrak{m}\mathfrak{r}\mathfrak{d}$ et $\mathfrak{d}\mathfrak{m}\mathfrak{r}\mathfrak{d}_0$

On considère ici la linéarisation au voisinage de 1 de  $\mathbf{DMRD}(\Gamma)$  :

**Définition 11.1.** *Pour tout  $\mathbb{Q}$ -anneau  $\mathbb{k}$ , soit  $\mathfrak{d}\mathfrak{m}\mathfrak{r}\mathfrak{d}(\mathbb{k})$  l'ensemble des séries  $\psi$  de  $\mathbb{k}\langle\langle X_\Gamma \rangle\rangle$  qui vérifient :*

$$(\psi|x_0) = (\psi|x_1) = 0 \quad (15)$$

$$\Delta\psi = 1 \otimes_{\mathbb{k}} \psi + \psi \otimes_{\mathbb{k}} 1 \quad \text{et} \quad \Delta_\star(\psi_\star) = 1 \otimes_{\mathbb{k}} \psi_\star + \psi_\star \otimes_{\mathbb{k}} 1, \quad (16)$$

$$\text{où l'on pose } \psi_\star := \mathbf{q}\mathbf{s}\pi_Y(\psi) + \psi_{\text{corr}} \quad \text{et} \quad \psi_{\text{corr}} := \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (\psi|y_n) y_1^n, \quad (17)$$

ainsi que la relation de distribution tangente

$$\text{proj}_{\Gamma \rightarrow \Gamma'}^2(\Phi) = \text{proj}_{\Gamma \rightarrow \Gamma'}^1(\Phi) + \sum_{\sigma[\Gamma, \Gamma'] = 1} (\Phi|x_\sigma) x_1,$$

pour tout sous-groupe  $\Gamma'$  de  $\Gamma$ . et les relations de poids 1, inchangées car linéaires.

**Proposition 11.2.** *Pour tout  $\psi$  de  $\mathfrak{d}\mathfrak{m}\mathfrak{r}\mathfrak{d}(\mathbb{k})$ , homogène de poids  $n \geq 3$  et tout  $\nu \in \Gamma$ , on a*

$$(\psi_\star|y_{n,\nu}) + (-1)^n (\psi_\star|y_{n,\nu-1}) = 0 \quad (18)$$

On démontre cela par une analyse explicite des contraintes portant sur les termes de longueur 1 et 2 de  $\psi$  imposées par les équations 16.

On qualifera d'exceptionnel un élément de  $\mathfrak{d}\mathfrak{m}\mathfrak{r}\mathfrak{d}(\Gamma)(\mathbb{k})$  ne vérifiant pas l'équation (18). Soit  $\mathfrak{d}\mathfrak{m}\mathfrak{r}\mathfrak{d}_0(\mathbb{k})$  l'ensemble des éléments de  $\mathfrak{d}\mathfrak{m}\mathfrak{r}\mathfrak{d}(\mathbb{k})$  qui la vérifient. Il y a essentiellement un seul élément exceptionnel pour chaque  $\Gamma$  :

**Proposition 11.3.** *Pour tout  $\Gamma$ , il existe un élément homogène  $\alpha_\Gamma$  de  $\mathfrak{d}\mathfrak{m}\mathfrak{r}\mathfrak{d}(\Gamma)(\mathbb{Q})$  tel que  $\mathfrak{d}\mathfrak{m}\mathfrak{r}\mathfrak{d}_0(\Gamma)(\mathbb{k})$  soit le noyau dans  $\mathfrak{d}\mathfrak{m}\mathfrak{r}\mathfrak{d}(\Gamma)(\mathbb{k})$  de la forme linéaire  $\psi \mapsto (\psi|\alpha_\Gamma)$ .*

Si le cardinal de  $\Gamma$  est au moins 3 on peut prendre pour  $\alpha_G$  un des  $y_{1,\nu} - y_{1,\nu-1}$  avec  $\nu^2 \neq 1$  (grâce aux relations de poids 1, toutes les formes linéaires ainsi obtenues sont colinéaires sur  $\mathbb{Q}$ ). Si  $\Gamma = \mathbf{1}$  ou  $\Gamma = \{\pm 1\}$ , on peut prendre  $\alpha_\Gamma = y_2$ . On considère dans la suite  $\alpha_\Gamma$  comme fixé.

**Définition 11.4.** *Pour tout  $\mathbb{Q}$ -anneau  $\mathbb{k}$  et tout  $\lambda \in \mathbb{k}$ , on note  $\mathbf{DMRD}_\lambda(\Gamma)(\mathbb{k})$  l'ensemble des éléments  $\Phi$  de  $\mathbf{DMRD}(\Gamma)(\mathbb{k})$  vérifiant :  $(\Phi|\alpha_\Gamma) = \lambda$ .*

On a ainsi décrit le morphisme de schémas  $\mathbf{DMRD}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{A}^1$  du théorème.

## 12 Action tangente

On donne dans cette partie quelques indications sur la démonstration de l'énoncé ci-dessous qui constitue une moitié du théorème. Pour alléger, les termes «  $\star$ -primitif » et «  $\star$ -codérivation » signifient respectivement « primitif » et « codérivation » pour le coproduit  $\Delta_\star$ .

**Proposition 12.1.** *Pour tout  $\mathbb{Q}$ -anneau  $\mathbb{k}$ , tout  $\lambda \in \mathbb{k}$  et tout élément  $\psi$  de  $\mathfrak{d}\mathfrak{m}\mathfrak{r}\mathfrak{d}_0(\Gamma)(\mathbb{k})$ , l'ensemble  $\mathbf{DMRD}_\lambda(\Gamma)(\mathbb{k})$  est stable par multiplication  $\otimes$  à gauche par  $\exp^\otimes(\psi)$ .*

Soit  $\psi \in \mathfrak{d}\mathfrak{m}\mathfrak{r}\mathfrak{d}_0(\mathbb{k})$ . La stabilité des équations (8) par  $\exp(s_\psi)$  est évidente.

En ce qui concerne les relations de mélange, qui s'expriment pour  $\Phi \in \mathbf{DMRD}(\Gamma)(\mathbb{k})$  par le fait que  $\Phi$  et  $\Phi_\star$  sont « group-like » respectivement pour  $\Delta$  et  $\Delta_\star$ , la situation est dissymétrique. En effet, l'ensemble des éléments « group-like » de  $(\mathbb{k}\langle\langle X_\Gamma \rangle\rangle, \Delta)$  est stable par  $\otimes$ . Dans l'optique



qui est la notre, cela peut se formuler ainsi : soit  $\psi \in \mathbb{k}\langle X_\Gamma \rangle$ ; l'opérateur  $s_\psi$  est somme de la dérivation  $d_\psi$  et de la multiplication à gauche par  $\psi$ ; si  $\psi$  est primitif (pour  $\Delta$ ), cette dernière est une codérivation, ainsi que  $d_\psi$ , car c'est une dérivation qui envoie les lettres de  $X_\Gamma$  sur des éléments primitifs;  $\exp(s_\psi)$  est donc un morphisme de cogèbres, ce qui permet de conclure. On va transposer cette méthode au coproduit  $\Delta_\star$ , mais on ne peut rien espérer d'aussi simple, car l'ensemble des « group-like » pour  $\Delta_\star$  n'est pas stable par  $\exp s_\psi$ , si  $\psi$  est un  $\star$ -primitif quelconque.

Premièrement, pour tout  $\psi \in \mathbb{k}\langle X_\Gamma \rangle$ , on voit facilement que le noyau de  $\pi_Y$  est stable par  $s_\psi$ . On peut donc considérer l'endomorphisme  $\mathbb{k}$ -linéaire  $s_\psi^Y$  de  $\mathbb{k}\langle Y_\Gamma \rangle$ , quotient par  $\mathbf{qs}\pi_Y$ . D'autre part, si l'on note  $\partial_{x_0}$  la dérivée partielle par rapport à  $x_0$  de  $\mathbb{k}\langle X_\Gamma \rangle$ , la projection  $\pi_Y$  est bijective de  $\ker \partial_{x_0}$  sur  $\mathbb{k}\langle Y_\Gamma \rangle$ . Son inverse  $\sigma$  est donné par

$$\sigma\psi = \sum_{i \geq 0} \frac{(-1)^i}{i!} \partial_{x_0}^i(\psi) x_0^i \quad (19)$$

Si  $\psi$  est une série de Lie,  $\partial_{x_0}(\psi)$  et  $(\psi|x_0).1$  coïncident. Si  $\psi$  appartient à  $\mathfrak{d}\mathbf{mr}\mathfrak{d}(\Gamma)(\mathbb{k})$ , on a donc  $\psi = \sigma\mathbf{ps}(\mathbf{qs}\pi_Y\psi)$ . Comme  $s_\psi$  dépend linéairement de  $\psi$ , pour  $\psi \in \mathfrak{d}\mathbf{mr}\mathfrak{d}(\Gamma)(\mathbb{k})$ , on peut décomposer  $s_\psi$  en  $s_{\sigma\mathbf{ps}\psi_\star} - s_{\sigma\psi_{\text{corr}}}$ .

**Proposition 12.2.** *Pour un élément  $\psi$  de  $\mathfrak{d}\mathbf{mr}\mathfrak{d}_0(\Gamma)(\mathbb{k})$ , homogène de poids  $p$ , l'endomorphisme  $\mathbb{k}$ -linéaire  $s_{\sigma\mathbf{ps}\psi_\star}$  de  $\mathbb{k}\langle Y_\Gamma \rangle$  est une  $\star$ -codérivation*

Pour démontrer cette proposition, on décompose  $s_{\sigma\mathbf{ps}\psi_\star}$  en somme de la translation à droite par  $\psi_\star$  qui est une  $\star$ -codérivation,  $\psi_\star$  étant  $\star$ -primitif et d'une dérivation. On exprime les valeurs de celle-ci sur les  $Y_{n,\nu}$  en fonction des  $Y_{n,\nu}$ , de  $\psi_\star$  et d'opérateurs respectant la  $\star$ -primitivité. On teste alors l'identité de codérivation sur les  $Y_\Gamma$ ; elle finit par se ramener à (18).

L'opérateur  $\exp s_{\sigma\psi_\star}^Y$  est donc un automorphisme de  $\mathbb{k}$ -cogèbres topologiques de  $(\mathbb{k}\langle Y_\Gamma \rangle, \Delta_\star)$ . Si  $\Phi$  appartient à  $\mathbf{DMRD}_\lambda(\mathbb{k})$ , l'élément  $\exp s_{\sigma\mathbf{ps}\psi_\star}^Y(\Phi_\star)$  est donc « group-like » pour  $\Delta_\star$ . Pour conclure, il suffit de prouver que c'est exactement  $(\exp(s_\psi)(\Phi))_\star$ . En effet, les termes correctifs (du type  $\Phi_{\text{corr}}$  ou  $\psi_{\text{corr}}$ ) sont des séries en  $y_1$  et  $x_1 = y_1$  est central; de plus, pour tout  $G \in \mathbb{k}\langle X_\Gamma \rangle$ , on a  $y_1 \otimes G = y_1 G$  et  $(\exp(s_\psi)(G)|y_n) = (\psi|y_n) + (G|y_n)$ . Pour les relations de distribution, il suffit de voir que les coefficients des  $(x_\sigma)_{\sigma \in \Gamma}$  s'additionnent de la même façon et que les applications  $\text{proj}_{\Gamma \rightarrow \Gamma'}^1$  et  $\text{proj}_{\Gamma \rightarrow \Gamma'}^2$  sont des morphismes de  $\mathbf{MT}(\Gamma)$  dans  $\mathbf{MT}(\Gamma')$ .

La proposition 12.1 implique également que  $\mathfrak{d}\mathbf{mr}\mathfrak{d}_0(\Gamma)(\mathbb{k})$  est une sous-algèbre de Lie de  $\mathbf{mt}(\Gamma)$ , car  $\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = [s_{\psi_1}, s_{\psi_2}](1)$ , pour tous  $\psi_1, \psi_2$  de  $\mathfrak{d}\mathbf{mr}\mathfrak{d}(\Gamma)$ , ce qui prouve que  $\langle \psi_1, \psi_2 \rangle$  vérifie les équations (16). Les autres équations se traitent comme ci-dessus. Par la formule de Campbell-Hausdorff,  $\exp^*(\mathfrak{d}\mathbf{mr}\mathfrak{d}_0(\mathbb{k}))$  est donc bien un sous-groupe de  $\mathbf{MT}(\Gamma)$ .

## 13 Transitivité

On indique ici comment se prouve la deuxième partie du théorème :

**Proposition 13.1.** *Pour tout  $\mathbb{Q}$ -anneau  $\mathbb{k}$  et tout  $\lambda \in \mathbb{k}$ , l'action de  $\exp^*(\mathfrak{d}\mathbf{mr}\mathfrak{d}_0(\mathbb{k}))$  sur  $\mathbf{DMRD}_\lambda(\mathbb{k})$  est libre et transitive.*

La liberté est évidente, puisque l'action est une translation au sein d'un groupe. Pour obtenir la transitivité, on suit la méthode d'approximations successives exposée dans [1].

Pour tout entier  $n$ , on note  $\mathbb{k}\langle X_\Gamma \rangle^{(n)}$  le quotient de  $\mathbb{k}\langle X_\Gamma \rangle$  par le  $n+1^{\text{ème}}$  terme de la filtration associée au poids et  $\pi^{(n)}$  la projection correspondante. On considère  $\mathbb{k}\langle X_\Gamma \rangle^{(n)}$  comme inclus dans  $\mathbb{k}\langle X_\Gamma \rangle$  : la projection  $\pi^{(n)}$  envoie tout mot de poids au moins  $n+1$  sur 0 et laisse les autres fixes. On note  $\mathbf{DMRD}_\lambda^{(n)}(\Gamma)(\mathbb{k})$  l'ensemble des éléments de  $\mathbb{k}\langle X_\Gamma \rangle^{(n)}$  satisfaisant aux équations définissant

$\text{DMRD}_\lambda(\Gamma)(\mathbb{k})$ , modulo des termes de poids au moins  $n + 1$ . Les  $\text{DMRD}_\lambda^{(n)}(\Gamma)(\mathbb{k})$  forment un système projectif dont la limite est  $\text{DMRD}_\lambda(\Gamma)(\mathbb{k})$ .

La remarque principale est la suivante : étant donné un élément  $\Phi = \Phi_1 + \dots + \Phi_n$  de  $\text{DMRD}^{(n)}(\Gamma)(\mathbb{k})$ , si l'on cherche un élément  $\Phi_{n+1}$  de  $\mathbb{k}\langle X_\Gamma \rangle$ , homogène de poids  $n + 1$  tel que  $\Phi + \Phi_{n+1}$  appartienne à  $\text{DMRD}^{(n+1)}(\Gamma)(\mathbb{k})$ , on résout un système linéaire (avec second membre) à coefficients rationnels. Le système homogène associé est exactement celui qui définit la composante homogène de poids  $n + 1$  de  $\mathfrak{dmr}\mathfrak{d}(\Gamma)(\mathbb{k})$ . La différence de deux solutions est donc un élément de  $\mathfrak{dmr}\mathfrak{d}(\Gamma)(\mathbb{k})$ . D'autre part, modulo des termes de poids au moins  $n + 2$ , si  $\psi$  est homogène de poids  $n + 1$ , l'opérateur  $\exp(s_\psi)$  agit sur une série de terme constant 1 par addition de  $\psi$ . On en tire par une récurrence facile l'énoncé suivant :

**Proposition 13.2.** *Si  $\text{DMRD}_\lambda(\Gamma)(\mathbb{k})$  est non-vide, l'action de  $\exp^*(\mathfrak{dmr}\mathfrak{d}_0(\Gamma)(\mathbb{k}))$  sur chaque troncation  $\text{DMRD}_\lambda^{(n)}(\Gamma)(\mathbb{k})$  et sur  $\text{DMRD}_\lambda(\Gamma)(\mathbb{k})$  est transitive.*

Pour tout  $\mu \in \mathbb{k}$ , soit  $h_\mu$  le morphisme de  $\mathbb{k}$ -algèbres topologiques multipliant chaque lettre de  $X_G$  par  $\mu$ . On voit facilement que  $\text{DMRD}(\Gamma)(\mathbb{k})$  est stable par  $h_\mu$ . Lorsque le cardinal de  $\Gamma$  vaut au moins 3, l'élément exceptionnel  $\alpha_\Gamma$  est de poids 1. On a donc  $h_\mu(\text{DMRD}_\lambda(\Gamma)(\mathbb{k})) \subset \text{DMRD}_{\lambda\mu}(\Gamma)(\mathbb{k})$ . Si  $\Gamma = \mathbf{1}$  ou  $\{\pm 1\}$ , on a  $h_\mu(\text{DMRD}_\lambda(\Gamma)(\mathbb{k})) \subset \text{DMRD}_{\lambda\mu^2}(\Gamma)(\mathbb{k})$ , car  $\alpha_G$  est de poids 2. Comme  $\mathcal{L}_\sqcup(\Gamma)$  appartient à  $\text{DMRD}(\mathbb{C})$ , en posant, suivant le cas,  $\mu = (\mathcal{L}_\sqcup(\Gamma)|\alpha_G)^{-1}$  ou  $\mu = (\mathcal{L}_\sqcup(\Gamma)|\alpha_G)^{-2}$ , on obtient par  $h_\mu$  un élément de  $\text{DMRD}_1(\Gamma)(\mathbb{C})$ , qu'on notera  $\bar{\mathcal{L}}_\sqcup$ .

**Proposition 13.3.** *Il existe un élément  $\Psi$  de  $\text{DMRD}_1(\Gamma)(\mathbb{Q})$ .*

On résout pour cela par récurrence les équations définissant  $\text{DMRD}_1(\Gamma)$ . Si  $\Phi$  est un élément de  $\text{DMRD}_1^{(n)}(\Gamma)(\mathbb{Q})$ , il existe  $\psi \in \mathfrak{dmr}\mathfrak{d}_0(\Gamma)(\mathbb{C})$  tel que  $\Theta := \exp(s_\psi)(\bar{\mathcal{L}}_\sqcup(\Gamma))$  soit égal à  $\Phi$  modulo des termes de poids au moins  $n + 1$ . Or  $\Phi + \Theta_{n+1} = \pi^{(n+1)}(\Theta)$  appartient à  $\text{DMRD}_1^{(n+1)}(\Gamma)(\mathbb{C})$ , en notant  $\Theta_{n+1}$  le terme de poids  $n + 1$  de  $\Psi$ . Le système linéaire satisfait par les coefficients d'un élément  $\Phi_{n+1}$  homogène de poids  $n + 1$  de  $\mathbb{Q}\langle X_\Gamma \rangle$  pour que  $\Phi + \Phi_{n+1}$  appartienne à  $\text{DMRD}_1^{(n+1)}(\Gamma)(\mathbb{Q})$  est entièrement rationnel et admet une solution complexe. Il admet donc une solution rationnelle.

Si le cardinal de  $\Gamma$  vaut au moins 3, on en déduit que  $\text{DMRD}_\lambda(\Gamma)(\mathbb{k})$  est non-vide pour tous  $\lambda$  et  $\mathbb{k}$  : il contient  $h_\lambda(\Psi)$ . Dans l'autre cas, on montre d'abord l'existence d'un élément  $\Psi_{\text{pair}}$  de  $\text{DMRD}_1(\Gamma)(\mathbb{Q})$  dont tous les termes de poids impairs sont nuls : avec les notations ci-dessus, 0 est solution du système linéaire portant sur  $\Phi_{n+1}$  si  $n + 1$  est impair tandis que  $\Phi$  est pair. On utilise alors  $h_\lambda^{\text{pair}}$ , l'opérateur qui multiplie les mots de poids  $2n$  par  $\lambda^n$ . La proposition 13.2 permet alors de conclure.

## 14 Conséquences et conclusion

Comme corollaire, l'application de  $\mathbb{k} \times \mathfrak{dmr}\mathfrak{d}_0(\Gamma)(\mathbb{k})$  dans  $\text{DMRD}(\Gamma)(\mathbb{k})$  donnée par  $(\lambda, \psi) \mapsto \exp^*(\psi) \otimes h_\lambda(\Psi)$  (ou, suivant le cas,  $\exp^*(\psi) \otimes h_\lambda^{\text{pair}}(\Psi_{\text{pair}})$ ) est un isomorphisme de schémas de  $\mathbb{A}^1 \times \mathfrak{dmr}\mathfrak{d}_0(\Gamma)$  sur  $\text{DMRD}(\Gamma)$ . Le foncteur  $\mathbb{k} \mapsto \mathfrak{dmr}\mathfrak{d}_0(\Gamma)(\mathbb{k}) = \mathfrak{dmr}\mathfrak{d}_0(\Gamma)(\mathbb{Q}) \hat{\otimes} \mathbb{k}$  est représentable par l'algèbre symétrique du dual gradué de  $\mathfrak{dmr}\mathfrak{d}(\Gamma)(\mathbb{Q}) \cap \mathbb{Q}\langle X_\Gamma \rangle$ . Cela montre que l'algèbre formelle  $\mathcal{DMRD}(\Gamma)$  définie par les relations  $\text{DMRD}$  est une algèbre de polynômes car  $\text{DMRD}(\Gamma)$  est son spectre et donne une description de ses générateurs libres.

La liberté de l'algèbre  $\mathcal{DMRD}(\mathbf{1})$  constitue une partie de l'énoncé du théorème d'Écalé. Il donne une description des générateurs en fonction de son algèbre de Lie des polynômes bialternaux, elle-même sous-algèbre de Lie de ARI. Il a très récemment étendu ces résultats au cas  $\Gamma = \{\pm 1\}$ . Une fois établie la correspondance entre les séries génératrices *commutatives* que Goncharov et lui utilisent et les séries génératrices non-commutatives de cette note, on constate que  $\mathfrak{mt}(\Gamma)$  est isomorphe à la sous-algèbre d'ARI formée des « moules entiers », *i.e.* correspondant à des séries

entières au voisinage de 0 et dont les variables  $u$  sont dans  $\Gamma$ , cas particulier dont les formules sont données chez Goncharov ([9]). Bien que développés indépendamment, les arguments utilisés par Écalte pour conclure semblent fortement recouper les nôtres (linéarisation et utilisation de la stabilité pour le crochet de  $\mathbf{mt}(\Gamma)$  des algèbres de Lie concernées).

Suivant la variante de Drinfel'd de la conjecture de Deligne ([6], p.860, questions), l'algèbre de Lie  $\mathbf{grt}_1$  du groupe  $\mathbf{Ass}_0 = \mathbf{GRT}_1$  (lequel agit sur les associateurs par translation à gauche au sein de  $\mathbf{MT}(\mathbf{1})$ ) est une algèbre de Lie libre, avec un générateur et un seul en chaque poids impair excepté 1. Drinfel'd exhibe, après Ihara, un système d'irréductibles de  $\mathbf{grt}_1(\mathbb{C})$ , avec les bonnes conditions de poids, en les lisant dans  $\Phi_{\text{KZ}}$  (qui est égal à  $\mathcal{L}_{\text{LJ}}(\mathbf{1})$ ). Plus précisément, ce sont les composantes homogènes de l'élément  $\psi$  de  $\mathbf{grt}_1(\mathbb{C})$  tel que  $h_{-1}(\Phi_{\text{KZ}}) = \exp^{\otimes}(\psi) \otimes \Phi_{\text{KZ}}$ . D'après le théorème I,  $\psi$  appartient également à  $\mathbf{dmrd}(\mathbf{1})(\mathbb{C})$ , ainsi donc que les irréductibles de Drinfel'd. Si la conjecture est vraie, on doit donc avoir  $\mathbf{GRT}_1 \subset \mathbf{DMRD}(\mathbf{1})$ . D'autre part, la conjecture de Zagier prévoit la dimension de l'espace vectoriel des polyzêtas de poids  $n$ . On peut formuler, pour s'affranchir des problèmes de transcendance, une variante formelle, *i.e.* portant sur la dimension des composantes homogènes de  $\mathbf{DMRD}(\mathbf{1})$ . Si cette conjecture est également vraie, par égalité des dimensions, l'inclusion ci-dessus est une égalité. Ceci motive la conjecture I énoncée à la section 10.

## 15 Tables de dimensions

Les dimensions ci-dessous ont été calculées par ordinateur. À titre indicatif, on donne également les dimensions de  $\mathbf{dmr}(\Gamma)$ , l'espace tangent à  $\mathbf{DMR}(\Gamma)$  au voisinage de 1. Par  $\mu_N$ , on entend le groupe des racines  $N^{\text{èmes}}$  de l'unité dans  $\mathbb{C}$ . Les symboles  $\dagger$  signalent la présence d'un élément irrégulier.

Composante homogène de poids  $p$  de  $\mathbf{dmr}(\mathbf{1}) = \mathbf{dmrd}(\mathbf{1})$

$N \setminus p$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0	$1^\dagger$	1	0	1	0	1	1	1	1	2

Composante homogène de poids  $p$  de  $\mathbf{dmrd}(\mu_N)$

$N \setminus p$	1	2	3	4	5	6	7
2	1	$1^\dagger$	1	1	2	2	4
3	$2^\dagger$	1	2	3	6		
4	$2^\dagger$	1	3	6			
5	$3^\dagger$	2	6	13			
6	$3^\dagger$	2	7				
7	$4^\dagger$	4	13				
8	$3^\dagger$	4	15				
9	$5^\dagger$	7	23				
10	$4^\dagger$	6	26				
11	$6^\dagger$	10					

Composante homogène de poids  $p$  de  $\mathbf{dmr}(\mu_N)$

$N \setminus p$	1	2	3	4	5	6	7
2	1	$1^\dagger$	1	1	2	2	4
3	$2^\dagger$	1	2	3	6		
4	$3^\dagger$	1	3	7			
5	$4^\dagger$	2	6	13			
6	$5^\dagger$	3	8				
7	$6^\dagger$	4	13				
8	$7^\dagger$	5	17				
9	$8^\dagger$	7	23				
10	$9^\dagger$	8	31				
11	$10^\dagger$	10					

## Références

- [1] D. BAR-NATAN – « On associators and the Grothendieck-Teichmüller group. I », *Selecta Math.* (N.S.) 4 (1998), no. 2, p. 183–212, q-alg/960621.

- [2] M. BIGOTTE, G. JACOB, N. OUSSOUS et M. PETITOT – « Tables des relations de la fonction zêta colorée », prépublication du LIFL, université Lille I, 1998.
- [3] L. BOUTET DE MONVEL – « Remarques sur les séries logarithmiques divergentes », Exposé au colloque « polylogarithmes et conjecture de Deligne-Ihara » au C.I.R.M. (Luminy), avril 2000.
- [4] D. J. BROADHURST – « Conjectured enumeration of irreducible multiple zeta values, from knots and Feynman diagrams », prépublication, 1996, [hep-th/9612012](#).
- [5] M. DEMAZURE et P. GABRIEL – *Groupes algébriques. Tome I : Géométrie algébrique, généralités, groupes commutatifs*, Masson & Cie, Éditeur, Paris, 1970.
- [6] V. G. DRINFEL'D – « On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely related to  $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  », *Leningrad Mathematical Journal* **2** (1991), p. 829–860.
- [7] J. ÉCALLE – « La libre génération des multizêtas et leur décomposition canonico-explicite en irréductibles », Notes de sminaire, automne 1999.
- [8] — , « ARI/GARI et la décomposition des multizêtas en irréductibles », prépublication, avril 2000.
- [9] A. GONCHAROV – « Multiple polylogarithms, cyclotomy and modular complexes », *Mathematical Research Letters* **5** (1998), p. 497–516.
- [10] — , « The dihedral Lie algebras and Galois symmetries of  $\pi_1^{(l)}(\mathbb{P}^1 \setminus (\{0, \infty\} \cup \mu_N))$  », *Duke Mathematical Journal* (2001), A paraître, [arXiv :math.AG/0009121](#).
- [11] M. HOANG NGOC et M. PETITOT – « Lyndon words, polylogarithms and the Riemann zeta function », *Discrete Mathematics* **217** (1-3) (2000), p. 273–292.
- [12] M. HOFFMAN – « The algebra of multiple harmonic series », *Journal of Algebra* **194** (1997), no. 2, p. 477–495.
- [13] Y. IHARA – « Braids, Galois groups, and some arithmetic functions », *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I, II (Kyoto, 1990)* (Tokyo), Math. Soc. Japan, 1991, p. 99–120.
- [14] — , « On the stable derivation algebra associated with some braid groups », *Israel J. Math.* **80** (1992), no. 1-2, p. 135–153.
- [15] C. MALVENUTO et C. REUTENAUER – « Duality between quasi-symmetric functions and the Solomon descent algebra », *Journal of Algebra* **177** (1995), no. 3, p. 967–982.
- [16] G. RACINET – « Séries génératrices non-commutatives de polyzêtas et associateurs de Drinfel'd », Thèse de doctorat, Université de Picardie-Jules-Verne, 2000, <http://www.dma.ens.fr/~racinet>.
- [17] C. REUTENAUER – *Free Lie algebras*, London Mathematical Society Monographs, New series, no. 7, Oxford, 1993.
- [18] Z. WOJTKOWIAK – « La monodromie des intégrales itérées sur la droite projective moins un nombre fini de points », *Colloque « polylogarithmes et conjecture de Deligne-Ihara »* (Luminy), C.I.R.M., avril 2000.
- [19] D. ZAGIER – « Values of zeta functions and their applications », *First European Congress of Mathematics, Vol. II* (Paris, 1992), Birkhäuser, Basel, 1994, p. 497–512.